PROBLEMAS FASE DE DISTRITO

1.- Calcular el valor de la expresión: $E = \left[(\sec x + \operatorname{cosec} x)^2 + (\operatorname{tg} x + \cot x)^2\right] \bullet \operatorname{sen} 2x.$

2.- Dada la recta x = a, un punto $M(x_1,y_1)$ se proyecta ortogonalmente sobre x = a en D y se traza OM que corta a x = a en B. Una paralela a OX por B corta a OD en N. Hallar la ecuación del lugar geométrico. de N cuando M describe la circunferencia $(x-b)^2 + y^2 = b^2$.

3.- Resolver sin calculadora la ecuación : $\sqrt[4]{6561}.12^{\sqrt{x}} = 6^x$

4.-a) Determinar el movimiento resultante de tres simetrías centrales respecto a los vértices de un triángulo equilátero de lado 3 cm. Estudiar si el producto es conmutativo.
b) Idem simetrías axiales respecto a las mediatrices. Estudiar el grupo que engendran.

5.-Determinar x, y, z en el número 33xy49z para que sea múltiplo de 693.

6.- Siendo M el punto medio del segmento de extremos A y B , estudia el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que PM sea media proporcional entre PA y PB.

7.- Determina la relación entre b y c para que estén en progresión aritmética las raíces de

$$x^3 + bx^2 + cx = 0$$

8 - Construir y resolver un triángulo rectángulo en A, conocidos c y a + b.

9.- Al dividir p(x) por (x + 2), (x - 2) y por (x + 3) se obtienen los restos 4, 8 y 13, respectivamente. Determinar el resto de dividir p(x) por (x + 2)(x - 2)(x + 3).

10.-En el cuadrado de vértices A, B, C y D, de lado a, se trazan los arcos BD y AC con centro en C y en D respectivamente, y radio a. Los dos arcos se cortan en M. Hallar el radio del círculo inscrito en el triángulo curvilíneo DMC.

11.- Hallar la suma: $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

calculando sus valores para n = 1, 2, 3, 4 para luego demostrar la fórmula por inducción.

12.- Sobre un segmento AB = 2a, tomado como base, se construyen tres triángulos isósceles ACB, AC'B y AC''B, de alturas respectivas a, 2a y 3a. Demostrar que C + C' + C'' = 180º.

13.- Se considera el triángulo ABC en el que A = 70º, B = 60º, y el triángulo A'B'C' formado por los pies de las alturas del ABC. Hallar los ángulos A', B', C'.

14.- Demostrar que los números de la serie 16, 1156, 111556, 11115556, ...que se van obteniendo intercalando 15 entre las cifras centrales, son siempre cuadrados perfectos.

15.- Construir un cuadrado cuyos lados o sus prolongaciones pasen por cuatro puntos dados sobre una recta.

16.- Sobre el anillo de los números enteros descomponer el polinomio $P = x^5-209x+56$ en producto de dos factores, sabiendo que se anula para dos valores x_1, x_2 recíprocos entre sí.

17.-Dados dos puntos A y B de la Tierra, supuesta esférica, tales que AB = 60º, hallar la relación entre las alturas x e y, a que deben elevarse dos observadores en las verticales de A y de B para que puedan verse y su valor concreto cuando sea x = y.

18.- Hallar los polígonos regulares cuyos ángulos miden un número entero de grados.

19.- Un depósito cerrado tiene la forma de un cilindro "tumbado" acabado en dos semiesferas por sus lados. Graduar una varilla para medir verticalmente el volumen de liquido contenido en el depósito en función del la altura marcada en la varilla.

20.- Expresar $(x - y)^4$ como función polinómica de $s = x + y$, y de $p = xy$.

21.- Determinar el conjunto de puntos P(x,y) tales que sen(x + y) = senx + seny.

22.- En el conjunto de puntos del plano de coordenadas enteras se define una relación de equivalencia por la condición de ser las primeras coordenadas congruentes módulo 2 y las segundas congruentes módulo 3. Se pide :

a) Número de clases de equivalencia.

b) Buscar el representante de cada clase que está a distancia mínima del origen.

c) Se definen una suma y un producto componente a componente, módulo 2 y 3 en cada una respectivamente. Comprobar que es un anillo y hallar sus divisores de cero.

23.- Resolver la ecuación $z^3=1$ y probar que las tres raíces obtenidas forman un grupo multiplicativo. Tabla del grupo.

24.- Construir un rectángulo conociendo un lado a = 6 y la diferencia d-b = 4 entre la diagonal y el otro lado.

25.- Hallar los valores n (entero positivo) para los que $N = 2^8 +2^{11} + 2^n$ es n cuadrado perfecto.

26.- Dos puntos A y B distan 86 km. Un móvil m sale de A hacia B, con velocidad v y otro móvil, n, sale a la vez de B hacia A, con velocidad 3v. Cuando n encuentra a m se vuelve hacia B y al llegar sale de nuevo hacia A. El proceso se repite hasta que los dos coinciden en B. ¿Cuál es la longitud total recorrida por n? ¿qué pasaría si n hubiera salido inicialmente también de A?

27.- Hallar todos los números complejos que verifiquen $\bar{z} = z^3$

28.- Resolver la siguiente ecuación sabiendo que una de sus raíces es inversa de otra:

$$\sqrt{2}x^4 - 3x^3 + 3\sqrt{2}x^2 - 6x + 2\sqrt{2} = 0$$

29.-Determinar el grupo de movimientos del triángulo equilátero. Tablas.

30.- ¿Qué lugar geométrico ha de describir el afijo del complejo z para que los afijos de z, iz, e i estén alineados?

31 En un trapecio ABCD, las diagonales AC y BD se cortan en P. Demostrar que el área del triángulo PBC es media proporcional entre las áreas de los triángulos ABP y PCD.

32.- En una OM ningún alumno ha resuelto todos los problemas; pero todos los problemas han sido resueltos por algún alumno. Demostrar que algún alumno A ha resuelto un problema P_1 y otro alumno B ha resuelto un problema P_2 ; sin que A haya resuelto P_2 ni B haya resuelto P_1.

33.- Se considera una superficie esférica E se radio 1 m., y un triedro trirrectángulo con vértice en el centro de la esfera. Se deben colocar ocho esferas de radio a en el interior de E, de forma que cada una de ellas sea tangente a los tres planos de T y a la propia superficie E. Calcular el valor de a. Dar el resultado en centímetros y con dos decimales.

34.- Dado un triángulo ABC, trazar una secante que corte a AB en M y a BC en N, de manera que el cuadrilátero AMNC y el triángulo BMN tengan el mismo perímetro y la misma área.

35.- Encontrar la fracción irreducible A/B, sabiendo que : B tiene 6 divisores. Si A/B=A'/B', con B' cuadrado perfecto, A' tiene 8 divisores; el producto A'.B' tiene 48 divisores; A es el menor número posible y lo mismo ocurre con B una vez elegido A.

36.- Una circunferencia de radio a se mueve rodando sobre el eje de abscisas. En cada posición de la circunferencia se traza la tangente no horizontal a la misma que pasa por el origen O de coordenadas y que corta en M a la vertical que pasa por su centro C. Por M se traza la segunda tangente a la circunferencia (simétrica de la anterior OM respecto a la vertical CM) y que corta en A al eje OX.

a) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos M.

b) Dibujar su gráfica

c) Demostrar que la recta AC, para todas las posiciones de la circunferencia, pasa por un punto fijo.

37.- Dos circunferencias de radio 1 m y 75 cm respectivamente, cuyos centros distan 2 m, se unen por una correa sin fin exteriormente. Determinar su longitud. Dibujarlo a escala 1/40. Calcular el área limitada por el perímetro del conjunto.

38.- Resolver en números naturales:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16}=1{,}4375$$

39.- Determinar a y b para que la ecuación $x^3 + ax^2 + bx - 0{,}125 = 0$ tenga sus raíces en progresión geométrica y hallar sus tres términos.

40.- En el plano complejo 2 + i es centro de un cuadrado, y 5 + 5i uno de sus vértices. Hallar los otros.

41.- Demuestra que la suma de cubos de tres números naturales consecutivos es múltiplo de 9.

42.- Por el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo se traza una recta que corta al cateto mayor con un ángulo de 45º. Calcular en función de la hipotenusa, la suma de los cuadrados de los segmentos determinados así en ese cateto.

43.- Dada una circunferencia de radio R, considerar cuatro circunferencias iguales de radio r, tangentes interiormente a la dada y tangentes exteriores cada una de ellas con las otras. Expresar r en función de R, primero exactamente y luego con cuatro decimales del correspondiente coeficiente. Hallar las áreas de los recintos que determinan.

44.-Demostrar que para todo n natural se verifica : $3^{2n+2} + 2^{6n+1} \equiv 0 \pmod{11}$.

45.-Dada una circunferencia y un punto exterior, trazar por él una secante que intercepte en la circunferencia una cuerda de longitud dada.

46.- Siendo A + B + C = 180º demostrar que tg A + tg B + tg C = tg A ·tg B· tg C.

47.- Hallar los valores naturales de x que convierten a la expresión $E = x^2 + 5x + 160$ en un cuadrado perfecto.

48.- Demostar que si en el triángulo ABC se cumple que $\text{sen}^2 A + \text{sen}^2 B + \text{sen}^2 C = 2$, entonces el triángulo es rectángulo.

49.-Un montón de naranjas se apila cuidadosamente en capas de forma que en el hueco de 4 naranjas de una capa se coloca otra de la capa superior. La primera capa por abajo tiene m filas y n columnas y la última por arriba una sola fila; siendo m el número de diagonales de un decágono y n el menor número que dividido por 4 da resto 3, por 5 da resto 4, y por 6 da resto 5. ¿Cuántas naranjas tiene el montón?

50.- Demostrar que para números reales cualesquiera : $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

51.- Se tiene una botella de fondo plano circular, cerrada y parcialmente llena en su parte cilíndrica. Discutir en qué circunstancias podemos calcular la capacidad de la botella y en qué forma se haría, si sólo disponemos de un doble decímetro graduado.

52.- Sea *C* una semicircunferencia de diámetro AB. Se construye una quebrada con origen A, que va alternativamente del diámetro a la semicircunferencia y de ésta al diámetro de modo que los lados formen todos igual ángulo α con el diámetro AB, alternativamente de uno y otro signo. Hallar el ángulo α para que la quebrada pase por el otro extremo B del diámetro. y la longitud total de la quebrada en función del ángulo α y de la longitud a del diámetro.

53.-Se da un triángulo equilátero ABC de centro O y radio OA = r. Las rectas de sus lados dividen al plano en 7 regiones. (el propio triángulo, 3 angulares abiertas y 3 poligonales abiertas) Se pide dibujar y describir las regiones del plano transformadas de una de las angulares y de una de las poligonales, por la inversión de centro O y radio r^2·

54.-Calcular los valores enteros de x que hacen entera: $f(x) = \dfrac{x^2}{x+6}$

55.- En el 5º piso de una casa de 7 estoy esperando el ascensor que inicia el ascenso con dos inquilinos dentro. Sabiendo que en cada piso viven 10 personas y que soy ajeno a la casa ¿cuál es la probabilidad de que se pare en el 5º piso?

56.- Para cada natural a definimos la sucesión:

$$S_a:\ x_1 = a,\ \ x_{n+1} = 2x_{n-1}\ (n = 1,2,3,\dots\ )$$

Demostrar que dado cualquier número natural b > 1, existe un único número par p tal que b es término de la sucesión S_p antes definida.

57.- Si z, z' son números complejos, demostrar: $|z+z'| = |z-z'| \Rightarrow \frac{iz}{z'}$ es número real

58.- Calcular $\sum_{k=5}^{k=49} \frac{11_{(k}}{\sqrt[3]{1331_{(k}}}$ sabiendo que 11 y 1331 están escritos en base k > 3.

59.- Demostrar que en el triángulo ABC, de lados $a \geq b \geq c$:

$$\frac{aA+bB+cC}{a+b+c} \geq \frac{\pi}{3}$$

60.- Calcular: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)....(2n)}$

61.-De entre los números 1, 2, 3, ..., 2n, se eligen de cualquier forma (n + 1) distintos. Demostrar que entre los números elegidos hay por lo menos dos tales que uno es divisor del otro.

62.- Demostrar : $\forall n \in N$ y $n > 1 \Rightarrow n! < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

63.- En un grupo de 24 alumnos de COU que han escogido al menos una de las asignaturas de Filosofía, Geografía y Matemáticas, 5 alumnos escogen Filosofía y Geografía, 3 Filosofía y Matemáticas, 6 Geografía y Matemáticas. El número de los que escogen sólo una de esas asignaturas es el mismo para las tres. ¿Qué número de alumnos ha escogido cada una de esas asignaturas?

64.- Sea un prisma hexagonal regular. ¿Cuál es la poligonal que partiendo de un vértice de la base, recorre todas las caras laterales y termina en el vértice de la cara superior, situado en la misma arista que el vértice de partida, y tiene longitud mínima?

65.- Se consideran en el plano los conjuntos de números complejos :

$$A = \left\{ z \;\middle|\; \arg[z-(2+3i)] = \frac{\pi}{4} \right\} \qquad B = \left\{ z \;\middle|\; |z-(2+i)| < 2 \right\}$$

Determinar la proyección ortogonal del conjunto intersección de A y B sobre el eje OX.

66.- Dadas dos rectas r , r' y un punto P que pertenece al plano que determinan las rectas pero no pertenece a ninguna de ellas, determinar un triángulo equilátero que tenga por vértice el punto P y los otros dos vértices cada uno sobre una recta.

67.- Demostrar que $A_n = 5^n + 2.3^{n-1} + 1$, es múltiplo de 8 para todo entero positivo n.

68.- Expresar el inverso de 3 en el cuerpo Z/(p), siendo p primo, en función de p.

69.- Hallar la inversión que transforma tres puntos no alineados A,B,C en los vértices de un triángulo equilátero.

70.- Demostrar que los tres afijos de z_1, z_2 y z_3 forman un triángulo equilatero si y sólo si

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$$

71.- Una persona pasa bajo un foco de luz durante la noche. En ese momento lleva una velocidad de v m/seg. sobre su camino rectilíneo. Averiguar la velocidad de crecimiento de su sombra conforme vaya marchando, siendo h y a las alturas del foco y de la persona.

72.- Sean C y C' dos circunferencias concéntricas de radios r y r'. Determinar el valor de la razón r/r' para que en la corona circular limitada entre C y C' existan ocho circunferencias tangentes cada una con sus dos inmediatas y todas ellas con C y C'.

73.- Se considera un triángulo equilátero de altura 1. Para todo punto P interior al triángulo sean x, y, z las distancias de P a los lados del triángulo.

a) Probar que x + y + x = 1 para todo punto P interior al triángulo.

b) ¿Para qué puntos del triángulo se verifica que la distancia a un lado es mayor que la suma de las distancias a los otros dos.

c) Hallar la probabilidad de que al romper en tres trozos un bastón de longitud 1, se pueda formar un triángulo con los tres trozos.

74.- Un número descompuesto en factores primos $n = a^x.b^y.c^z$ disminuye el número de sus divisores en 72 , 48 o 54 al dividirlo por a, por b o por c respectivamente. Hallar el valor de n.

75.- Un reloj se mueve con velocidad constante y sus agujas se superponen cada 62 minutos. Averiguar si avanza o atrasa y precisar en qué proporción.

76.- Estudiar el isomorfismo del grupo aditivo de los enteros módulo 4, Z/(4), y el grupo multiplicativo de los elementos no nulos de los enteros módulo 5, Z/(5).

77.- Demostrar que si $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$, entonces x + y = 0.

78.- Los lados del triángulo ABC son a, b, c, y sus medianas m_a, m_b, m_c. Demostrar que es cierta la siguiente desigualdad y que las cotas, 3/4 y 1, que pone de manifiesto, no pueden mejorarse:

$$\frac{3}{4} < \frac{m_a + m_b + m_c}{a+b+c} < 1$$

79.- En una circunferencia de radio 1, se trazan dos cuerdas AB y AC de igual longitud.

a) Construir la cuerda DE que queda dividida en tres partes iguales por sus cortes con AB y AC

b) ¿Cuánto valen los dos segmentos en que queda dividida AB, cuando AB abarca un arco de 90º?

80.- Se consideran las parábolas de ecuaciones: $\begin{array}{ll} y = cx^2 + d & (c > 0, d < 0) \\ x = ay^2 + b & (a > 0, b < 0) \end{array}$ que se cortan en cuatro puntos. Demostrar que esos cuatro puntos están en una misma circunferencia.

81.- Demostrar que, si a es natural no nulo, a^4 se escribe, en base 5, con cifras que terminan en uno o en cuatro ceros.

82.- Demostrar que en un grupo de orden par existe al menos un elemento distinto del neutro, que es su propio inverso.

83.- Calcular: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

84.- Dada la función f(x), real y continua en [0,1], demostrar que tiene límite y calcularlo :

$$B_n = \frac{f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + ...+ f\left(\frac{n}{n}\right)}{n}$$

85.- Demostrar que siendo a y b enteros positivos:

$$\frac{a}{b} < \sqrt{2} < \frac{a+2b}{a+b}$$

¿Cuál de las dos fracciones está más cerca del número $\sqrt{2}$?

86.- Se colocan doscientos soldados (todos ellos de talla diferente) en formación de 20 columnas y 10 filas. Tomando el soldado más alto de cada una de las 20 columnas, llamemos X al menor de los veinte. Tomando el más bajo de cada una de las 10 filas, llamemos Y al más alto de los diez. ¿Cuál es más alto X ó Y ?

87.- Completar la siguiente fila del triángulo de Tartaglia:

1,....................., 3003, 2002, 1001,...................1

88.- Sean P_0, P_1, P_2 los afijos de i, 1, 0. Llamemos P_3 al punto en que la perpendicular trazada desde P_2 corta a P_0P_1 ; sea P_4 al punto en que la perpendicular trazada desde P_3 corta a P_1P_2; y así sucesivamente. Hallar el límite de la sucesión P_n.

89.- Demostrar que: $N = \sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$ es entero

90.- Hallar la potencia n-ésima de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

91.– Calcular el limite de la sucesión : $A_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^k} + \frac{2^k}{n^k} + \frac{3^k}{n^k} + ... + \frac{(n-1)^k}{n^k} + \frac{n^k}{n^k} \right)$

92.- Probar que si el producto de n números reales y positivos es igual a 1, su suma es mayor o igual que n.

93.- En el plano, dada una recta r y dos puntos A y B exteriores a la recta, y en el mismo semiplano; se pide determinar un punto M de la recta, tal que el ángulo de r con AM sea doble del de r con BM.

94.- Se eligen aleatoriamente dos números reales entre 0 y 1; calcular la probabilidad de que uno cualquiera de ellos sea menor que el cuadrado del otro.

95.- Calcular : $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{2\sqrt{-4x^2 - 12x - 5}}\, dx$ mediante su interpretación geométrica.

96.- En el interior de un cuadrado ABCD de lado unidad se toma un punto P y se consideran las cuatro distancias PA, PB, PC, PD. Demostrar que :

a) A lo más una de dichas distancias es mayor que $\sqrt{5}/2$

b) A lo más dos de dichas distancias son mayores que 1

c) A lo más tres de dichas distancias son mayores que $\sqrt{2}/2$

97.- Se toma un número $A = a_1a_2a_3$.... y el número $A' = a_1+a_2+a_3+$...formado por la suma de sus cifras. De la diferencia de ambos $A - A' = b_1b_2b_3$. se quita una de sus cifras b_i Averiguar cuál es el valor de esa cifra si nos dan la suma $B = b_1 + b_2 + b_3 +$... de las restantes cifras de A - A'.

98.- Si se calcula aproximadamente el cuadrado de un número decimal mediante interpolación con una tabla de cuadrados de números naturales, utilizando la misma idea que para hallar el logaritmo de un número no contenido en la tabla, demostrar que el máximo error cometido es menor o igual que 0,25

99.- En un plano se dan cuatro puntos fijos A, B, C, D no alineados tres a tres. Construir un cuadrado cuyos lados a, b, c y d sean segmentos a los que pertenezcan respectivamente A, B, C y D.

100.- Demostrar que la ecuación : $z^4 + 4(i+1)z + 1 = 0$ tiene una raíz en cada cuadrante del plano complejo.

101.- Probar que la siguiente sucesión es monótona y acotada. Calcular su límite.

$$a_o = 1; \quad a_n = \sqrt{4+3a_{n-1}}, \quad n = 1,2,3,...$$

102.- a) Si $0 < x < 1$, probar que $x.(1-x) \leq 1/4$ ¿Se alcanza la igualdad?.

b) Probar que si $x_1, x_2, ..., x_n$ pertenecen al intervalo (0,1), al menos uno de los productos

$$x_1.x_2....x_n \text{ y } (1-x_1)(1-x_2)...(1-x_n)$$

es menor ó igual que 2^{-n}

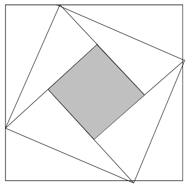
103.- Demostrar para los llamados números de Fermat :

$$F_0 = 1+2^{2^0};\ F_1 = 1+2^{2^1}\ ;\ F_2 = 1+2^{2^2};\ ...\ ;\ F_n = 1+2^{2^n}$$

la relación: $F_{n+1} = 2 + F_0.F_1.F_2...F_n$.

104.- Demostrar que m.c.d.(F_n, F_m) = 1 para dos números de Fermat distintos cualesquiera .

105.- Un solar en forma de trapecio tiene su base mayor de fachada. Dividirlo en dos partes de igual área y de igual fachada.



106.- Doblar las puntas de un cuadrado en la forma que indica la figura de modo que el área del cuadrado del centro valga 1/n de la del cuadrado grande.

107.- Dados un polígono p y un punto interior A, trazar una recta que pase por A y que intercepte con p un segmento con punto medio en A.

108.- Por un punto común a dos circunferencias secantes dadas, trazar una recta que determine en ambas circunferencias cuerdas de igual longitud.

109.- Dadas dos rectas r y s y un punto P fuera de ambas, construir un cuadrado con un vértice en P y los dos contiguos en r y s.

110.- Inscribir en un cuadrado dado un triángulo equilátero con un vértice común.

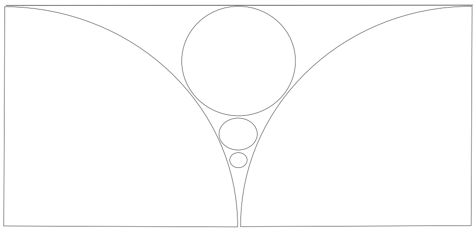
111.- Hallar el lugar geométrico de los ortocentros de los triángulos con un lado fijo y ángulo opuesto constante.

112.- Dos tangentes a una circunferencia paralelas entre sí, son cortadas por otra tangente en los puntos A y B. Demostrar que las rectas que unen A y B con el centro de la circunferencia son perpendiculares.

113.- Dadas n rectas ordenadas, construir un n-ágono que tenga a las rectas dadas por mediatrices de sus lados.

114.- Hallar el lugar geométrico de la esquina de una hoja de papel rectangular que se dobla de modo que el área de la zona doblada es constante.

115.- Calcular: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^{\alpha}+2^{\alpha}+.....+n^{\alpha}}{n^{\alpha+1}}\right)$



116.- En el rectángulo de la figura cuya base es doble que la altura, se construyen los dos cuadrantes de circunferencia mostrados y las circunferencias tangentes a ambos cuadrantes y a la anterior (excepto la primera que es tangente al lado superior del rectángulo). Si numeramos las circunferencias en orden de tamaños decrecientes se pide demostrar que la expresión para el diámetro d_n de la n-ésima circunferencia es:

$$d_n = \frac{R}{n(n+1)}$$

siendo R la altura del rectángulo. Como aplicación demostrar que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+.....+\frac{1}{n(n+1)}\right)=1$$

117.- En una circunferencia se dan dos puntos fijos A y B y otro variable M. Sobre la recta AM y fuera de la circunferencia, se toma un punto N tal que MN = MB. Hallar el lugar de N.

118.- En un cuadrilátero arbitrario ABCD se trazan las bisectrices de los cuatro ángulos. Demostrar que los cuatro puntos de intersección de las bisectrices A y C con B y D son concíclicos.

119.- Dada una circunferencia y dos números positivos h y m, de modo que exista un trapecio ABCD inscrito en la circunferencia, de altura h y suma de sus bases m. Construir dicho trapecio.

120.- Demostrar que para todo entero n se cumple:

a) n^3-n es divisible por 3.

b) n^5-n es divisible por 5.

c) n^7-n es divisible por 7.

121.- Demostrar que : $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$ expresado en forma decimal, da un número periódico mixto para cualquier n.

122.- La suma de un cierto número de enteros consecutivos vale 1000. Hallar esos enteros.

123.- Encontrar un número de 4 cifras de la forma aabb que sea cuadrado perfecto.

124.- ¿Quién es mayor: 1000^{1000} ó 1001^{999} ?.

125.- Resolver la ecuación: $\sqrt{a-\sqrt{a+x}} = x$.

126.- Resolver: $x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}}$

127.- Resolver la ecuación: $|x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| = x + 2$

128.- ¿Cuántas raíces tiene la ecuación: $\operatorname{sen} x = \frac{x}{100}$?

129.- Encontrar la suma de los coeficientes del polinomio que resulta de operar y reducir términos en la expresión: $(1 - 3x + 3x^2)^{743}(1 + 3x - 3x^2)^{744}$.

130.- Demostrar que en el desarrollo de la siguiente expresión no existen términos de grado impar:

$$(1 - x + x^2 - x^3 + \dots\dots - x^{99} + x^{100})\ (1 + x + x^2 + x^3 + \dots\dots + x^{99} + x^{100}).$$

131.-Resuelve en R el sistema:

$$\begin{cases} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = 1 \\ 4x^3y - 4xy^3 = 1 \end{cases}$$

132.- Hallar a para que los polinomios: $x^2 + ax + 1$; y $x^2 + x + a$ tengan al menos una raíz común.

133.- Demostrar que si un polinomio de cualquier grado con coeficientes enteros toma el valor 7 para cuatro valores enteros de x, entonces no puede tomar el valor 14 para ningún valor entero de x.

134.- Dadas dos circunferencias C y C' y un segmento AB de longitud L, hallar una recta paralela a AB que interseque en C y C' cuerdas cuya suma de longitudes valga L.

135.- Dado un triángulo ABC, determinar un punto P tal que los ángulos PAB, PBC y PCA sean iguales.

136- Encontrar dos cifras distintas entre sí A y B tales que el número de la forma BABABA sea múltiplo de AAA, de BBB y de AB, y, sin embargo, BA no sea múltiplo de B.

137.- Un número entero se escribe con tres cifras distintas. Obtenemos tres números de dos cifras cada uno suprimiendo la cifra de las centenas, la de las decenas y la de las unidades. La suma de estos tres números es la mitad del número de tres cifras inicial. Hallarlo.

138.- En la isla de Camelot viven 13 camaleones rojos, 15 verdes y 17 amarillos. Cuando dos de distinto color se encuentra, cambian simultáneamente al tercer color. ¿podría darse la situación en la que todos tengan el mismo color?.

139.- Sobre una cinta métrica de dos metros subdividida en milímetros, señalamos un trazo verde cada 11 mm. y un trazo rojo cada 17 mm, ambos comenzando desde el mismo extremo. Hallar cuántos trazos verdes están, a 1mm. de un trazo rojo.

140.- Un gato está quieto a la izquierda de una ratonera (considerada como un punto) acechando la salida de algún ratón. Sale un ratón que huye hacia la derecha lo más rápido que puede. El gato corre tras él y lo atrapa. Cuándo se dispone a devorarlo ve cómo sale un segundo ratón que huye hacia la izquierda a la misma velocidad que el primero. El gato sale en su persecución y atrapa a su segunda víctima después de una carrera que dura cinco veces más que la anterior. De nuevo se dispone a comérselo cuando ve salir un tercer ratón que huye hacia la derecha algo más despacio que los anteriores debido al reuma que padece. El gato sale tras él y lo caza en un tiempo doble del empleado para el segundo ratón. Con estos datos se trata de hallar la relación Vs/Vr siendo Vs la velocidad del ratón sano y Vr la del ratón con reuma.

141.- Los profesores y alumnos de un instituto son entre todos 1991 personas. En una excursión han de atravesar un río para lo que disponen de una sola barca. La barca no puede llevar a la vez más de 100 kilos. Cada alumno pesa 50 kilos y cada profesor 100 (la sabiduría es muy pesada). Se necesitan como mínimo 4235 travesías para que pasen todos. Hallar el número de profesores y el de alumnos. (Cada viaje de ida y vuelta son dos travesías).

142.- ABC es un triángulo isósceles, r y R los radios de los círculos inscrito y circunscrito respectivamente y d la distancia entre el incentro y el circuncentro. Demostrar que:

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

143.- Encontrar todos los números naturales n tales que $2^n - 1$ es divisible por 7. Demostrar que no hay ningún natural p tal que $2^p + 1$ es divisible por 7.

144.- Dada la sucesión de Fibonacci $a_1 = a_2 = 1 \quad \forall n \geq 2 \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

Demostrar que se cumplen las siguientes propiedades:

a) $a_{n+2} = 1 + a_1 + a_2 + \dots\dots + a_n$

b) $a_n \cdot a_{n-1} = a_1^2 + a_2^2 + \dots\dots\dots\dots + a_n^2$

c) $a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2} + (-1)^n$

145.- Se toman dos números a y b al azar, ambos entre 0 y 1. Hallar la probabilidad de que a sea mayor o igual que el cuadrado de b y al mismo tiempo b sea mayor o igual que el cuadrado de a.

146 -Demostrar que $n^4 + 4$, (siendo n natural) sólo es primo para n = 1.

147.- Dados $0 < x_1 < y_1$. Definimos por recurrencia las sucesiones:

$$x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}, \qquad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

a) Demostrar que: $x_1 < x_2 < x_3 < \dots\dots < x_n < y_n < y_{n-1} < \dots\dots < y_2 < y_1$

b) Demostrar que ambas sucesiones tienen un mismo límite y calcularlo.

148.- Tres esferas de igual radio se encuentran sobre una mesa tocándose entre sí. Hallar el radio máximo de una cuarta esfera para que quede entre las tres y la mesa.

149.- Demostrar que los cuadrados de los números naturales tienen un número impar de divisores.

150.- Dada la sucesión:

$$a_1 = \sqrt{k}; \quad a_2 = \sqrt{k+\sqrt{k}}; \quad a_3 = \sqrt{k+\sqrt{k+\sqrt{k}}} \ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Demostrar que es convergente y hallar su límite.

151. - Demostrar que: $\dfrac{A}{a} = \dfrac{B}{b} = \dfrac{C}{c} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{Aa} + \sqrt{Bb} + \sqrt{Cc} = \sqrt{(A+B+C)(a+b+c)}$

152.- Hallar la inversión que transforma tres puntos alineados A,B,C en los vértices de un triángulo equilátero.

153.- Dada la siguiente configuración de los números naturales:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & 3 & 4 & & \\ & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

hallar la suma de los números situados en la n-ésima fila.

154.- Hallar una progresión aritmética tal que la suma de sus n primeros términos valga n^2 para todo n.

155.- En un pentágono regular se trazan las diagonales, que forman otro pentágono regular en su interior. Hallar la razón entre sus áreas.

156.-Demostrar: $\forall n \in N \quad y \ n > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + \ldots\ldots\ldots + \dfrac{1}{n+n} > \dfrac{1}{2}$

157.- Hallar las posiciones de las manecillas de un reloj susceptibles de estar en posición inversa. Es decir la horario en la posición de la minutera y viceversa.

158.- Resolver la ecuación : $4x^3 + 6x^2 + 12x + 5 = 0$, sabiendo que existen enteros a y b tales que la ecuación dada puede ponerse en la forma: $(x + a)^4 = (x + b)^4$

159.- Demostrar que si una ecuación P(x) = 0 tiene dos raíces inversas, éstas también son raíces de la ecuación $P\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$. Aplicar el resultado para resolver la ecuación: $x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 8x + 2 = 0$ sabiendo que tiene dos raíces inversas.

160.- En el triángulo ABC, el vértice A es fijo y el ángulo BAC constante. B recorre una recta y el producto AB·AC es constante. Hallar el lugar geométrico de C.

161.- Hallar una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean los cubos de las de:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

162.-En un pentágono regular se trazan las diagonales que forman en su interior otro pentágono regular. Hallar la razón entre sus áreas.

163.- Se tienen dos semirrectas OX y OY con origen común y formando un ángulo x. A y B son dos puntos fijos sobre OX. Se pide:

a) Hallar sobre OY un punto T tal que la diferencia de los ángulos TAB y TBA valga x.

b) Lugar de T al variar x.

164.- Dado un cono recto de generatriz a y diámetro de la base b, determinar un plano paralelo a la generatriz de modo que el segmento parabólico que resulta en la sección tenga área máxima.

165.- Una semicircunferencia de radio r se divide en n + 1 partes iguales. Se une el k-ésimo punto de división con los extremos del diámetro formándose un triángulo. Si llamamos A(k) a su área, hallar el límite cuando n tiende a infinito de la media aritmética de las áreas A(k).

166.- Demostrar que para todo n entero positivo, el número $3^n - 2n^2 - 1$ es múltiplo de 8. Probar además que, si n no es múltiplo de 3, entonces $3^n - 2n^2 - 1$ es múltiplo de 24.

167.- Si a, b, c son los lados de un triángulo, demostrar: $1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2$

168.- En un sistema cartesiano rectangular se dan los puntos A(6,0) y B(-3,0). Por A se traza una recta variable y sobre ella se toma un punto C a distancia 6 de A. Por B se traza una recta paralela a la anterior y sobre ella se toma D distantes 3 unidades de B y en el mismo sentido. Hallar el lugar geométrico del punto P de intersección de AD con BC.

169.- Resolver el sistema siguiente en las incógnitas x,y,z:

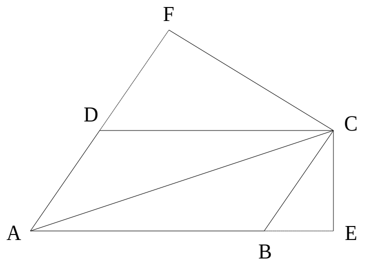
$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ x^2 + y^2 + z^2 &= b^2 \\ xy &= z^2 \end{aligned}$$

170.- Demostrar que: $\forall n \in N : \binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots\dots\dots + \binom{n}{n}^2$

171.- Sobre una circunferencia se dan tres puntos A,B,C . Construir con regla y compás un cuarto punto D de modo que en el cuadrilátero ABCD se pueda incribir otra circunferencia.

172.- Sea AC la diagonal mayor del paralelogramo ABCD. Desde C se trazan las perpendiculares a AB y AD. Sean E y F los pies de estas perpendiculares. Demostrar que:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AE} + \overline{AD} \cdot \overline{AF} = \overline{AC}^2$$



173.- De tres números x,y,z se conoce su suma S_1, la suma de sus cuadrados S_2 y la suma de sus cubos S_3. Hallar el producto xyz.

174.- Se considera la función: $f(x) = x^4 - x^3 + \lambda x^2 + 6x + 4$.

a) Hallar λ para que f(x) tenga dos raíces x_1 y x_2 cuyo producto sea 2.

b) Calcular x_1 y x_2 para el valor de λ hallado.

c) Para el mismo valor de λ resolver la ecuación f(x) = 0.

175.-Dadas las ecuaciones con coeficientes complejos:

$$\begin{cases} x^2 - sx + p = 0 \\ x^2 - s'x + p' = 0 \end{cases}$$

Hallar las condiciones que deben cumplir los coeficientes para que las raíces formen un cuadrado siendo las de cada ecuación vértices opuestos.

176.- Demostrar: $\forall n, k \in N$ con $k \leq n \Rightarrow (n+1)(n+2)\dots\dots\dots(2n-1)(2n)$ es múltiplo de 2^k

177.- Resolver la ecuación: $4x^4 + 16x^3 - 6x^2 - 40x + 25 = 0$

178.- Si a,b,c son tres reales positivos cualesquiera, demostrar que se cumple:

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6$$

179.- Sobre los lados AB y AC de un triángulo, se toman, respectivamente los puntos L y M tales que:

$$\vec{AL} = \frac{2}{5}\vec{AB} \quad , \quad \vec{AM} = \frac{2}{5}\vec{AC}$$

Las rectas BM y CL se cortan en P y AP corta en N a AC. Hallar el número x tal que:

$$\vec{BN} = x\,\vec{BC}$$

180.- Se consideran las ecuaciones de segundo grado con coeficientes enteros:

$$\begin{cases} x^2 + bx + c = 0 \\ x^2 + b'x + c' = 0 \end{cases} \qquad \text{verificando:} \quad (b-b')^2 + (c-c')^2 > 0$$

Probar que, si las dos ecuaciones tienen una raíz común, las otras raíces son enteras y distintas.

181.- En un rectágulo se unen los puntos medios de cada lado con los extremos del lado opuesto, calcular el área del octógono formado en el centro en función del área del rectángulo.

182.- En el espacio vectorial R^n de n-uplas de números reales, se considera el subconjunto:

$$A = \{(a_1,a_2,...,a_n) \mid a_1,a_2,...,a_n \text{ es una progresión aritmética}\}$$

Demostrar que A es un subespacio vectorial de R^n, y determinar una base del mismo.

183.-En el espacio euclídeo E^3, se considera un tetraedro, en el que dos pares de aristas opuestas son ortogonales. Probar que el tercer par también lo es.

184.- Se tienen tres bolsas, conteniendo n bolas numeradas por 1,2,3,...,n. Se extrae, al azar, una bola de cada bolsa; sean x,y,z los números de las bolas extraídas. Calcular la probabilidad de que

$$x + y = z.$$

185.-Sean C1 y C2 dos circunferencias exteriores y r una recta exterior a ambas que las deja en un mismo semiplano. Determinar los puntos P de esta recta que verifiquen que las tangentes trazadas desde P a las circunferencias formen ángulos iguales con r.

186.- Siendo n múltiplo de 3, hallar el valor de: $(1+\sqrt{3}i)^n - (1-\sqrt{3}i)^n$

187.- Sobre una circunferencia k, se dan tres puntos distintos, A,B,C. Indicar cómo se puede obtener con regla y compás un cuarto punto D sobre k, tal que se pueda inscribir un circulo en el cuadrilátero así construído.

188.- Los cuadrados de los lados de un triángulo ABC son proporcionales a 1, 2 y 3.

a) Demostrar que los ángulos formados por las medianas son iguales a los ángulos del triángulo ABC.
b) Demostrar que el triángulo cuyos lados son las medianas de ABC, es semejante a ABC.

189.- Dado un ángulo agudo XOY, y un punto A sobre OY, indicar cómo se puede determinar con regla y compás un punto M sobre OY que equidiste de A y del otro lado OX del ángulo.

190.- Sea n un número natural cualquiera. Demostrar que, para todo $k \leq n$, la expresión:

$$(n + 1)(n + 2) \ldots (2n - 1)(2n)$$

es divisible por 2k.

191.- Se consideran los lados del pentágono, hexágono y decágono regulares, inscritos en una misma circunferencia de radio R. Demuéstrese que el triángulo, cuyos lados son los de esos tres polígonos, es rectángulo.

192.-Hallar tres números naturales en progresión aritmética de diferencia 2, tales que la suma de sus cuadrados sea un número de 4 cifras iguales.

193.- Dado un cuadrado de lado a, se trazan arcos de circunferencia, de radio a, con centro en cada uno de los vértices, interiores al cuadrado, dividiendo a éste en 9 regiones, cuatro iguales entre sí, otras cuatro iguales entre sí, y una distinta. Calcular el área de cada uno de los tres tipos de regiones en que ha quedado dividido el cuadrado.

194.- Se considera un polinomio P(x) de grado 100, con coeficientes enteros, todos ellos distintos entre sí, y cuyos valores absolutos son menores o iguales que 50. Determinar si P(x) es divisible por x - 1.

195.- Sean a_k y A_k las áreas de los polígonos regulares de k lados, inscrito y circunscrito, respectivamente, a una misma circunferencia. Demostrar que:

$$a_{2n} = \sqrt{a_n \cdot A_n}$$

196.- Sin resolver la ecuación cúbica $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, expresar la suma de los cubos de sus raíces en función de los coeficientes a, b, y c.

197.- Sobre una mesa se encuentra una semiesfera de radio 1 con su parte plana hacia abajo. En forma circular, rodeando la semiesfera, se colocan 6 esferas de radio r, de tal forma que cada una es tangente a la semiesfera, a la mesa y a las dos esferas adyacentes. Calcular r.

198.- Se define la sucesión de números complejos $\{a_n\}$, n >1, por

$$a_n = (1+i)(1+\frac{i}{\sqrt{2}}).........(1+\frac{i}{\sqrt{n}}).$$

Averiguar si existe un número natural m tal que:

$$\sum_{n=1}^{m} |a_n - a_{n+1}| = 1990$$

199.- La ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, (c no nulo), tiene tres raíces distintas en progresión geométrica y cuyos inversos pueden ordenarse de modo que formen progresión aritmética. Hallar b y c en función de a.

200.- Sea ABC un triángulo cualquiera. Exteriormente a él se construyen dos cuadrados BAEP y ACRD de lados AB y AC, respectivamente. Sean M y N, respectivamente, los puntos medios de BC y ED. Demostrar que AM es perpendicular a ED y que AN es perpendicular a BC.