Problemas de fases nacionales e internacionales

1.- (China 1993). Dado el paralelogramo ABCD, se consideran dos puntos E, F sobre la diagonal AC e interiores al paralelogramo. Demostrar que si existe una circunferencia pasando por E y F y tangente a las rectas AB y BC, entonces también existe una circunferencia pasando por E y F y tangente a las rectas DA y DC.

2.- (Alemania 1990). Dado un heptágono ABCDEFG de lado 1, pribar que las diagonales AC y AD verifican:

$$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=1$$

3.- (Turquía 1993).- Sea M el circuncentro de un triángulo acutángulo ABC. Supongamos que la circunferencia que pasa por B, M, A corta en P al segmento BC y en Q al segmento AC. Demostrar que CM es perpendicular a PQ.

4.- (Turquía 1993).- Sobre un semicirculo de diámetro AB y centro O se consideran los puntos E u C de modo que OE es perpendicular a AB y la cuerda AC corta a OE en D interior al semicirculo. Hallar todos los valores del ángulo $\angle CAB$ de modo que en el cuadrilátero OBCD pueda inscribirse un círculo.

5.- (Irlanda 1993).- Los números reales α y β verifican:

$$\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha-17=0, \qquad \beta^3-3\beta^2+5\beta+11=0$$

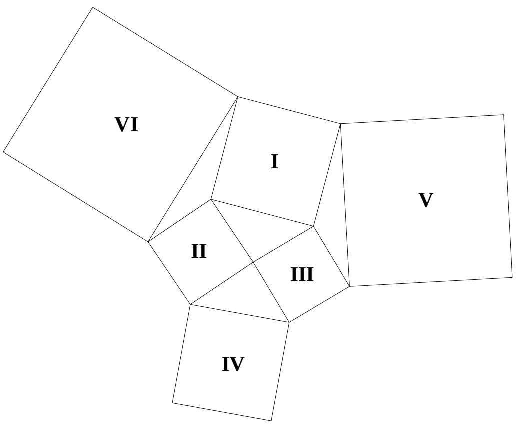
Hallar $\alpha + \beta$.

6.- (Alemania 1992).- En la fracción:

$$\frac{ABA}{CDC}=0,DEFGDEFGDEFG.......$$

cada letra representa un dígito. Letras distintas corresponden a dígitos distintos. El desarrollo decimal es periódico puro con un periodo de longitud cuatro. Hallar la fracción.

7.- (Alemania 1992).- Se colocan seis cuadrados del modo que muestra la figura:
Demostrar que la suma de las áreas del cuadrados “interiores” denotados por I,II,III es la tercera parte de la suma de las áreas de los cuadrados “exteriores” denotados por IV, V, VI.



8.- (Alemania 1990).- Demostrar que para todo entero n > 1 se cumple:

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot ....\cdot(2n-1) < n^n$$

9.- (IV Olimpiada internacional).- Hallar el menor número natural n que cumpla:
a) Su representación en base decimal termina en 6.
b) Si borramos el 6 final y lo colocamos delante del resto de los dígitos, el número resultante es cuatro veces el anterior.

10.- (IV Olimpiada internacional).- Resolver en R la inecuación:

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{3}$$

11.- (IV Olimpiada internacional).- En un concurso deportivo hay m medallas para repartir en n días consecutivos (n > 1). El primer día se reparten 1 medalla mas $\frac{1}{7}$ de las restantes. El segundo día se reparten 2 medallas mas $\frac{1}{7}$ de las restantes y así sucesivamente. El n-ésimo día se repartieron las n medallas que quedaban. Hallar el número de días y de medallas.

12.- (X Olimpiada internacional).- Probar que existe un único triángulo con los lados enteros consecutivos y uno de sus ángulos doble que otro.

13.- (I Olimpiada internacional).- Se toma un punto arbitrario M en el interior de una segmento dado AB. Se construyen los cuadrados AMCD y MBEF ambos al mismo lado de AB. Las circunferencias circunscritas a estos cuadrados con centros en P y Q, se cortan en M y en un segundo punto N. Sea N' la intersección de las rectas AF y BC. Demostrar:
a) N y N' coinciden.
b) Las rectas MN pasan por un punto fijo S con independencia de la elección de M.
c) Hallar el lugar geométrico del punto medio del segmento PQ cuando M varía en AB.

14.- (II Olimpiada internacional).- Construir un triángulo ABC conociendo h_a, h_b y m_a.

15.- (II Olimpiada internacional).- Resolver en R la desigualdad:

$$\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2}<2x+9$$

16.- (III Olimpiada internacional).- Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b^2 \\ xy=z^2 \end{cases}$$

siendo a y b constantes. Dar las condiciones que deben satisfacer a y b para que las soluciones del sistema sean distintas.

17.- Demostrar que en un triángulo de lados a, b, c y área T se verifica: $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}T$.
¿En qué caso se verifica la igualdad?.

18.-(Irlanda 1993).- La recta *l* es tangente en A a la circunferencia S. B y C son dos puntos de *l* uno a cada lado de A. Las tangentes a S por B y C se cortan en P. Hallar el lugar geométrico de P cuando B y C varían sobre *l* de modo que |AB|·|AC| es constante.

19.- (Irlanda 1993).- La función f(x) = $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ con n > 0 y todos los a_i reales verifica |f(0)| = f(1) y cada raíz α de f es real y satisface $0 < \alpha < 1$. Probar que el producto de las raíces no es mayor que $\frac{1}{2^n}$.

20.- (Irlanda 1993).- Dados cinco puntos P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 del plano todos con coordenadas enteras, demostrar que existe al menos un par (P_i, P_j) con $i \neq j$ tal que la recta $P_i P_j$ contiene un punto Q de coordenadas enteras estando Q estrictamente entre P_i y P_j.

21.- (Alemania 1992).- Para cada entero positivo n definimos n? del siguiente modo:

$$n? = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 1 \\ \dfrac{n}{(n-1)?} & \text{para } n \geq 2 \end{cases}$$

Probar que $\sqrt{1992} < 1992? < \frac{4}{3}\sqrt{1992}$

22.- (Concurso Nórdico 1993).- Sea F una función real decreciente definida para todo los valores de x con $0 \leq x \leq 1$ y verificando:

a) $F\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{F(x)}{2}$

b) F(1 - x) = 1 - F(x).

Hallar $F\left(\frac{173}{1993}\right)$ y $F\left(\frac{1}{13}\right)$.

23.- (Concurso Nórdico 1993).- Un hexágono está inscrito en una circunferencia de radio r. Dos de sus lados tienen longitud 1, otros dos tienen longitud 2 y los dos restantes longitud 3. Probar que r verifica la ecuación: $2r^3 - 7r - 3 = 0$.

24.- (Concurso Nórdico 1993).- Encontrar todas las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} s(x) + s(y) = x \\ x + y + s(z) = z \\ s(x) + s(y) + s(z) = y - 4 \end{cases}$$

donde x, y, z son enteros positivos y s(x), s(y), s(z) representa el número de dígitos de x, y, z respectivamente.

25.- (Irán 1993).- Encontrar todas las soluciones enteras de la ecuación: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{mn^2} = \frac{3}{4}$.

26.- (Irán 1993).- Sea X un conjunto con n elementos. Demostrar que el número de pares (A, B) tales que A y B son subconjuntos de X, A es subconjunto de B y A ≠ B, es $3^n - 2^n$.

27.- (Irán 1993).- a, b, c son números racionales. Una de las raíces de $ax^3 + bx + c = 0$ es igual al producto de las otras dos. Probar que esa raíz es racional.

28.- (Irán 1993).- Encontrar todos los primos p tales que $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ es cuadrado perfecto.

29.- (Irán 1993).- Sea O la intersección de las diagonales de un cuadrilátero convexo ABCD. P y Q son los circuncentros de los triángulos AOB y COD respectivamente. Demostrar que:

$$PQ \geq \frac{AB+CD}{4}$$

30.- (Irán 1993).- ABC es un triángulo rectángulo en A, Las bisectrices interiores de B y C cortan a los lados opuestos en D y E respectivamente. I es el incentro. Demostrar que el área del cuadrilátero BCDE es doble del área del triángulo BIC.

31.- (Irán 1993).- Dada la sucesión:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{a_{n-1}}{1+\left(a_{n-1}\right)^2} \quad n > 1.$$

Demostrar que: $52 < a_{1371} < 65$.

32.- En el triángulo ABC, A ≤ 90º y B = 2C. La bisectriz interior de C corta a la mediana AM (M punto medio del lado BC) en D. Demostrar que ∠MDC ≤ 45º. ¿Cuál es la condición para que se cumpla la igualdad?.

33.- (Canadá 1993).- En el triángulo ABC las medianas de AB y AC son perpendiculares. Demostrar que $\cot B + \cot C \geq \frac{2}{3}$.

34.- (Canadá 1993).- Encontrar los polinomios $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ que verifican la ecuación $f(x^2) = (f(x))^2$ para cualquier x real.

35.- (Corea 1993).- Sea ABC un triángulo con $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$. Encontrar el punto P para el que $a \cdot \overline{AP}^2 + b \cdot \overline{BP}^2 + c \cdot \overline{CP}^2$ es mínimo y hallar el valor del mínimo.

36.- (Corea 1993).- Hallar el entero positivo x más pequeño para el que $\frac{7x^{25}-10}{83}$ es entero.

37.- (Corea 1993).- Un entero se llama pitagórico si es el área de un triángulo rectángulo con lados enteros. Probar que para cualquier natural n (n > 12), existe un número pitagórico entre n y 2n.

38.- (Turquía 1993).- Demostrar que existe una sucesión infinita de enteros positivos tal que el primer término es 16, el número de divisores positivos distintos de cada término es múltiplo de 5 y los términos forman una progresión aritmética. De todas las sucesiones encontradas, hallar la de diferencia mínima.

39.- (China 1993).- Hallar todos los enteros no negativos x, y, z tales que: $7^x + 1 = 3^y + 5^z$.

40.- (Turquía 1993).- Sea Q^+ el conjunto de los racionales positivos. Encontrar todas las funciones $f : Q^+ \to Q^+$ tales que :

$$\forall x, y \in Q^+, \quad f\left(x + \frac{y}{x}\right) = f(x) + \frac{f(y)}{f(x)} + 2y .$$

41.- (Ucrania 1992).- A, B, C, D son cuatro puntos del plano de los que sabemos:

$$\overline{AB} < \overline{CB}, \quad \overline{AB} < \overline{DB}, \quad \overline{CD} < \overline{AD}, \quad \overline{CD} < \overline{BD}$$

Probar que los segmentos AB y CD no se cortan.

42.- (Ucrania 1992).- Sean a, b, c reales tales que $a \geq b \geq c > 0$. Demostrar que:

$$\frac{a^2 - b^2}{c} + \frac{c^2 - b^2}{a} + \frac{a^2 - c^2}{b} \geq 3a - 4b + c$$

43.- (Ucrania 1992).- A es un punto fijo de una circunferencia dada y D otro punto fijo interior. Se considera una cuerda arbitraria BC que pasa por D. Sea M el baricentro de ABC. Determinar el conjunto de todos los posibles puntos M.

44.- (Ucrania 1992).- Demostrar que no existen soluciones reales del sistema:

$$\begin{cases} x^2 + 4yz + 2z = 0 \\ x + 2xy + 2z^2 = 0 \\ 2xz + y^2 + y + 1 = 0 \end{cases}$$

45.- (Ucrania 1992).- Demostrar la desigualdad: $\frac{a+b}{b+c} + \frac{c+d}{d+a} \leq 4\frac{a+c}{b+d}$. siendo a, b, c, d números reales del intervalo cerrado [1, 2].

46.- (Ucrania 1992).- Probar que $\operatorname{arctg}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ es irracional.

Nota: Este enunciado *puede* ser erróneo y el correcto ser "Probar que $\frac{1}{\pi}\mathit{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)$ es irracional"

47.- (Austria-Polonia 1993).- Hallar todos los naturales $x, y \geq 1$ tales que: $2^x - 3^y = 7$.

48.- (Austria-Polonia 1993).- Hallar todas las soluciones reales del sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y = 3x + 4 \\ 2y^3 + z = 6y + 6 \\ 2z^3 + x = 9z + 8 \end{cases}$$

49.- (Checoeslovaquia 1992).- Resolver la ecuación: $\cos 12x = 5\text{sen } 3x + 9\text{tg}^2 x + \text{ctg}^2 x$.

50.- (Checoeslovaquia 1992).- ABC es un triángulo acutángulo. La altura relativa a B corta a la circunferencia de diámetro BC en P y Q y la altura relativa a C corta a la circunferencia de diámetro AB en M y N. Demostrar que P, Q, M, N están en la misma circunferencia.